Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270348
Centre d'intérêt: 89

Lunkenbein, Dieter, 1937-

Formation de groupements : tentatives de recherches en apprentissage dans l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques / par Dieter Lunkenbein ; [pour l'] Université de Sherbrooke, Faculté des sciences, Département de mathématiques, Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Le Département, 1980.

37 f. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke. Département de mathématiques ; 24)

Bibliographie: f. 37.

Cote Dewey: 510.7/L963f Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Théorie de l'apprentissage *Développement de l'étudiant *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Rationalisation des interventions didactiques *Schème opératoire *Approche piagétienne

Expérience en vue de déterminer si la pertinence mathématique (ou extrinsèque) du concept de groupement ne pourrait pas être complétée par une pertinence intrinsèque (pertinence relative au processus d'apprentissage "naturel" de l'enfant d'âge scolaire). Les problèmes suivants ont été posés: quels pourraient être, dans le comportement d'enfants placés en situation précise d'apprentissage, les indices importants d'existence ou d'activités de formation de groupements? comment pourrait-on reconnaître la formation des éléments déterminants de ces groupements? enfin, par quelles étapes passe cette formation?

La situation a été expérimentée de façon individuelle auprès de 39 enfants de l'école primaire Jean XXIII à Sherbrooke (six ou sept par degré) entre novembre 1978 et janvier 1979. Chaque enfant avait à sa disposition un ensemble de cubes emboîtables de deux couleurs avec lesquels il devait construire autant de tours à cinq étages différentes que possible. Il s'agissait de la concrétisation d'un problème de combinatoire, celui de trouver le nombre de différents arrangements de deux éléments pris cinq à la fois.

L'apparition progressive de schèmes opératoires relevés dans cette situation expérimentale, soit par la cohérence de construction de tours, soit par des gestes appropriés ou soit par des verbalisations des enfants, peut être considérée comme principal indice de la formation de groupements. Cependant l'expérience décrite n'a pas permis d'observer des schèmes opératoires indiquant une certaine conception du groupement de construction de tours.

Type de document: r
Région(s) administrative(s): 05
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270368

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Rapport No. 24 Février 1980

Formation de groupements

Tentatives de recherches en apprentissage dans l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

par

Dieter Lunkenbain

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques et d'informatique

E D U Q 8270368

Rapport No. 24 Février 1980

Formation de groupements

Tentatives de recherches en apprentissage dans l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

par

Dieter Lunkenbein

Formation de groupements

Tentatives de recherches en apprentissage dans l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

par

Dieter Lunkenbein

Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences
Département de mathématiques, Section enseignement

Février 1980

TABLE DES MATIERES

I. Contexte et problématique.

II. Stratégie et démarche possible.

III. Une première expérience.
1. Motivation et description de la situation.
2. Analyse de la situation.
3. Description de l'expérimentation et de l'enregistrement des observations.
4. Les observations et leurs traitements.
a.- Description d'un cas précis.
b.- Les résultats retenus dans chacune des expériences.
5. Résultats d'expérimentation.
a.- Observations générales.
b.- Les résultats mesurés et leurs observations.

IV. Conclusion et prospectives

Annexe 1: Fiche d'observation.

Annexe 2: Traitement d'un cas précis.
2.1 Fiche d'observation.
2.2 Fiche d'analyse.
2.3 Fiche de structuration.
2.4 Fiche de résultats.

Annexe 3: Mesures de la complétude d'application de schèmes opératoires.

Annexe 4: Tableau synthèse des résultats.

Bibliographie.

Formation de groupements - Tentatives de recherches en apprentissage dans l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

D. Lunkenbein, Université de Sherbrooke

I. Contexte et problématique

Dans le cadre de l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques (LUNKENBEIN, 1977, Lunkenbein, Allard, Goupille 1979), les travaux de reformulation et de formalisation (cf. v. g. WITTMANN 1973 et 1975), se sont avérés fructueux et stimulants. Effectivement, ces travaux permettent d'interpréter une multitude de situations ou de contenus mathématiques en termes de groupements et ils amènent l'investigateur averti à "voir" des groupements partout: contenus d'enseignement structurables en termes de groupements et contenus mathématiques structurés (inconsciemment) en groupements par le mathématicien chercheur et enseignant. - La formalisation du concept de groupement à l'aide du langage des catégories, l'a rendu général à un point tel qu'il permet d'y intégrer des situations très concrètes depuis l'apprentissage initial jusqu'aux situations abstraites de l'enseignement supérieur. Cette "pertinence mathématique" motive le chercheur à creuser et appronfondir davantage le sujet afin d'explorer d'autres domaines de pertinence.

Ainsi pourra-t-on étudier la pertinence du concept en terme d'élément de base dans les stratégies d'enseignement. En effet, puisque cette structure permet d'organiser des

contenus mathématiques, elle permet également d'organiser des démarches d'enseignement et des stratégies d'interventions[1]. Mais cette pertinence relative à la démarche d'enseignement ou à la stratégie d'intervention resterait bien extrinsèque si elle ne s'appuyait que sur cette pertinence mathématique. Il faudrait donc essayer de voir si cette pertinence extrinsèque ne pourrait pas être complétée par une pertinence intrinsèque: pertinence relative au processus d'apprentissage "naturel" de l'enfant d'âge scolaire. La structure de groupement et les notions qui lui sont rattachées permettent-elles de décrire (au moins partiellement) l'image mentale formée ou en état de formation par l'apprenant? Le groupement, conçu en tant que modèle de structure mentale, nous facilite-t-il la compréhension et l'interprétation des actions (concrètes ou mentales) de l'individu en termes de manifestations cohérentes d'une image mentale que s'élabore ou que s'est construite l'individu dans une situation donnée? - Les travaux de J. Piaget nous incitent fortement à admettre ce potentiel au concept en question mais, à notre connaissance, il n'existe pas encore de recherches explicites décrivant le comportement de l'apprenant en termes de groupements.

Nous nous sommes donc posé le problème suivant: quels pourraient être, dans le comportement d'enfants placés en situation précise d'apprentissage, les indices importants d'existence ou d'activités de formation de groupements; comment pourrait-on reconnaître (aussi objectivement que possible) la formation (ou la genèse) des éléments déterminants de ces groupements; enfin, par quelles étapes passe cette formation?

---

1. Des exemples de stratégies d'interventions basées sur une organisation de contenus mathématiques en termes de groupements ont été élaborés par: R. Bibeau (1977), M. Hamel (1979), L. Aubin et J. Jutras (1979), H. Allard, P. Allard, C. Goupille et D. Lunkenbein (1980).

II Stratégie et démarche possible

Nous concevons le groupement en tant qu'élément constituant de la structure cognitive totale de l'individu; cette dernière structure permet à l'individu de se comporter de manière cohérente et intelligente dans une variété de situations particulières. Dépendant de cette situation, l'individu fait appel à des parties particulières de sa structure cognitive totale ou en élabore de nouvelles pour pouvoir "interagir" de façon satisfaisante avec cette situation spéciale de son environnement. La ou les parties particulières de sa structure cognitive totale, dont l'existence ou l'élaboration lui permettent de "maîtriser" la situation en question, peuvent être conçues en tant que groupements, parties de groupements ou fragments de groupements. Ce sont alors les actions et les réactions (concrètes ou mentales) que l'individu effectuera avec une certaine cohérence et persistance qui nous révèleront le schème cognitif appliqué dans une situation donnée et qui nous fourniront des indications relatives au groupement ou fragment de groupement utilisé ou développé.

Ces actions se manifesteront dans des activités concrètes ou des expressions verbales de l'enfant en fonction de la situation précise et du problème particulier posé. Il est donc important d'étudier ces indices d'existence ou de formation de groupements dans des situations qui encouragent l'enfant à exprimer ces schèmes cognitifs ou bien visuellement par des activités concrètes et observables ou bien verbalement par une description de sa stratégie d'action. Ces indices pourront alors être intégrés dans des structurations possibles de la situation que l'on aura analysée à priori tout en conservant une ouverture d'esprit pour des réactions inattendues ou imprévisibles. Pour pouvoir observer le développement de groupements à travers les

divers groupes d'âges, la situation ou le problème d'expérimentation devraient être facilement accessibles même aux jeunes enfants tout en permettant une richesse d'actions ou une variété de solutions partielles. Pour pouvoir observer le développement de l'apprentissage, (guidé ou non) la situation d'expérimentation doit être non triviale tout en admettant des cheminements rudimentaires ou élémentaires.

Les possibilités d'observation de l'existence et de la formation de groupements dépendent donc largement des situations concrètes d'expérimentation que l'on sera en mesure de concevoir et qui doivent répondre aux critères suivants:

- la situation d'expérimentation doit stimuler l'utilisation ou le développement de schèmes opératoires dans le cadre d'une structure de groupement et elle doit être conçue de façon à ce que l'enfant exprime ces schèmes soit visuellement, soit verbalement;
- la situation d'expérimentation doit être facile d'accès même aux jeunes enfants tout en permettant une richesse d'actions ou une variété de solutions partielles, si l'on veut observer une formation de groupement à travers divers groupes d'âge;
- la situation d'expérimentation doit être non triviale tout en admettant des cheminements rudimentaires ou élémentaires, si l'on veut observer un développement progressif d'apprentissage.

La conception d'une telle situation d'expérimentation ira de pair avec son analyse en termes de groupements et avec l'indication à priori de ces derniers auxquels on comparera ensuite les résultats d'expérience. Il va de soit que cette analyse à priori dirigera l'observation pendant l'expérimentation. Elle a comme rôle de sensibiliser l'observateur à des actions ou réactions possibles, mais elle ne doit pas diminuer son attention relative aux comportements inattendus

ou imprévisibles. L'expérimentation (clinique) aboutira à l'élaboration d'un protocole dynamique et descriptif (éventuellement accompagné de documents audio-visuels) qui sera par la suite soumis à un traitement adéquat pour isoler et comparer les résultats les plus significatifs de l'expérience. Dans le cadre d'expériences sur la formation de groupements, les résultats suivants seront parmi les plus significatifs:

- nombre et propriétés d'états créés (si la création d'états fait partie de la situation);
- schèmes opératoires appliqués et la fréquence de leur application;
- degré de maîtrise de la situation exprimé en termes de fragments de groupements ou de sous-groupements;
- progrès d'apprentissage (s'il y en a) en termes de différences d'indices qui précèdent.

Le traitement adéquat de ces résultats sera à préciser selon les buts particuliers visés et selon le déroulement des expériences. Nous y reviendrons en temps et lieu lors de l'analyse des résultats de l'expérience suivante qui constitue un exemple de la démarche ainsi décrite.

III Une première expérience

1. Motivation et description de la situation

Une première situation a été choisie et élaborée, non pas en raison de l'importance de son contenu dans le cadre de l'enseignement de la mathématique au primaire, mais à cause de son accessibilité par un grand nombre d'apprenants, de son potentiel de solutions partielles et de la possibilité d'observation d'actions concrètes. Nous espérons que cette situation puisse nous servir comme champ d'exploration de ce type de recherches qui devraient, par la suite, être élargies à des situations d'une pertinence plus immédiate et traditionnelle dans l'enseignement au primaire.

La situation en question est la suivante: l'apprenant a à sa disposition un approvisionnement suffisant (plus que nécessaire) de cubes emboîtables de deux couleurs différentes (blanche et verte ou de deux couleurs contrastantes). Parce qu'ils sont emboîtables, ces cubes permettent la construction de tours à plusieurs étages. On suggère alors à l'apprenant de construire des tours à cinq étages et d'en construire autant qu'il le peut avec la restriction que ces tours doivent toutes être différentes.

2. Analyse de la situation

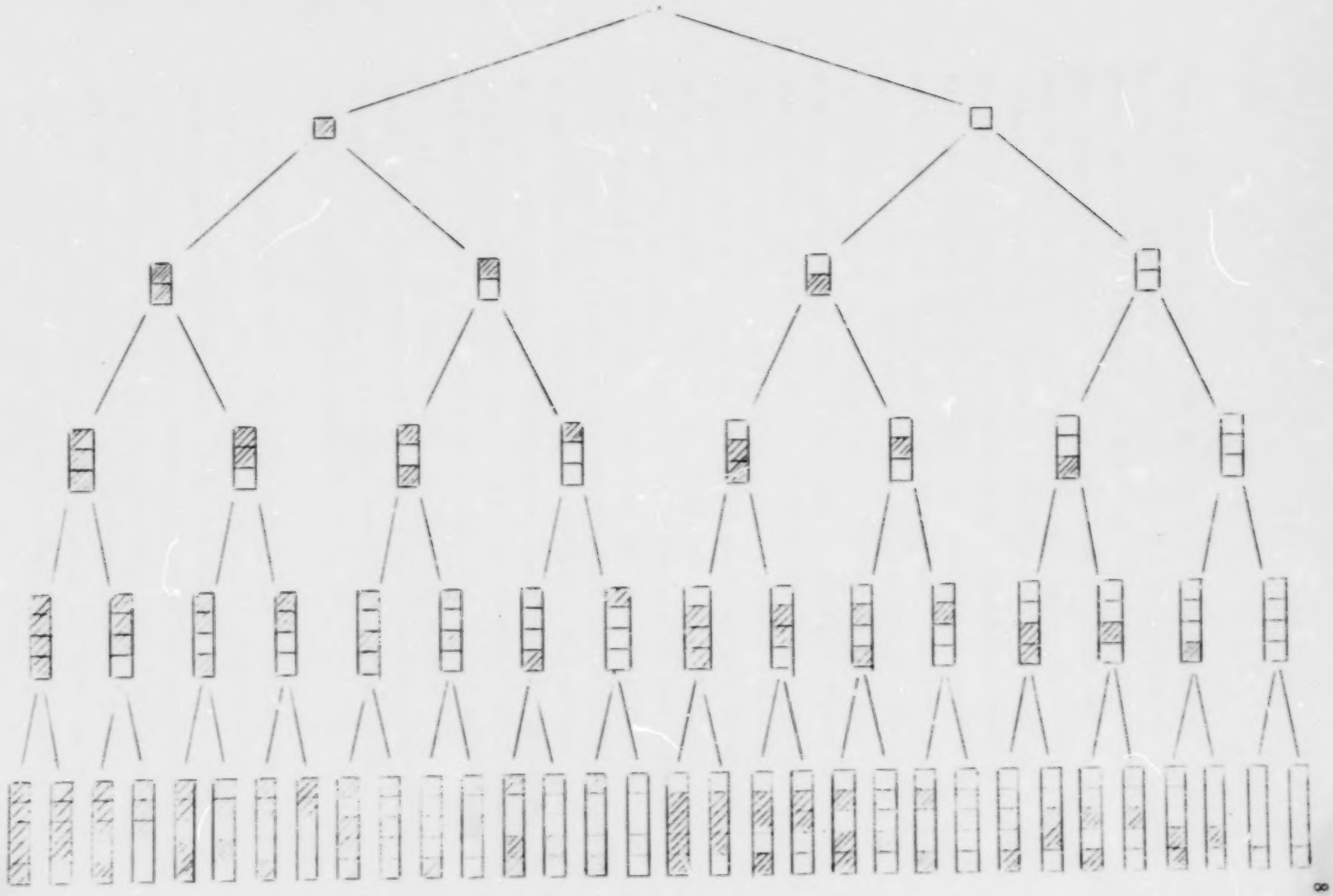
Du point de vue mathématique, la situation est une concrétisation du problème de combinatoire, celui de trouver le nombre de différents arrangements de deux éléments pris cinq à la fois. Ce nombre est $2^5 = 32$, ce qui est habituellement illustré à l'aide de l'arbre de construction de la figure 1 qui montre que, pour chaque étage, il y a les deux possibilités de se servir ou bien d'un cube blanc ou bien d'un cube vert; pour

la construction des tours à 5 étages, nous avons donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ possibilités. Ce problème mathématique peut évidemment être généralisé à un nombre q d'éléments pris p à la fois ce qui peut être concrétisé par le nombre de tours à p étages et de q couleurs différentes.

Du point de vue didactique, l'explication et l'illustration précédentes font appel à un groupement (de construction de tours) dont les états sont les tours de 0 à 5 étages et dont le schème opératoire élémentaire est "d'ajouter un cube vert ou blanc" (figure 1). Ce groupement n'est donc pas un groupement des tours à cinq étages et de deux couleurs différentes,mais un groupement de la construction des dites tours dont la conception présume une analyse de l'activité de construction. C'est cette activité de construction qui peut facilement être prolongée à plus d'étages ou élargie à plus de couleurs qui mène à la généralisation naturelle dont il a été question ci-haut. Ce groupement de construction de tours est alors un groupement puissant puisqu'il réussit non seulement à résoudre le problème particulier mais encore parce qu'il mène naturellement à des solutions plus générales. Il n'est cependant pas évident que les apprenants, face à la situation décrite, conçoivent spontanément un tel groupement.

Il faudra s'attendre à ce que, dans le traitement de la situation par les jeunes enfants, une analyse du processus de construction n'ait pas encore eu lieu. Ainsi ces sujets pourraient-ils tenter de "structurer" directement les tours à 5 étages et 2 couleurs par des actions (concrètes ou mentales) sur de telles tours pour en engendrer d'autres. Ceci engendrera éventuellement des groupements des tours à cinq étages avec divers schèmes

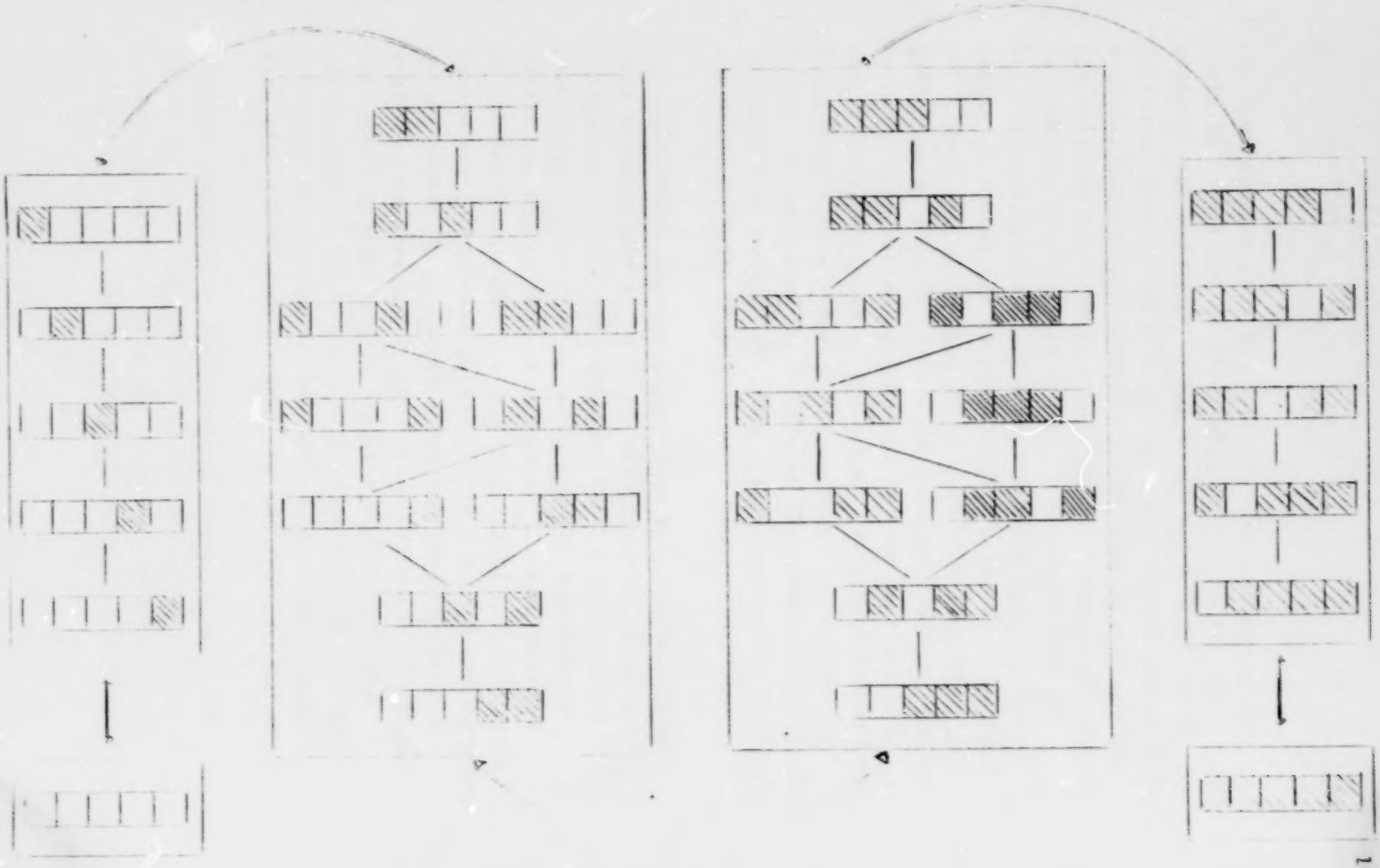
Figure 1: groupement de construction de tours
(construction de tours à deux couleurs, schème élémentaire: "changer le nombre d'étages d'un seul étage")



opératoires possibles. De tels schèmes opératoires pourraient être, par exemple, "changer le nombre de cubes verts" ou "changer la position relative des cubes". Une structuration à l'aide de ces deux schèmes est représentée dans la figure 2. Nous reconnaissons que les schèmes en question pourraient être précisés encore de différentes façons: ainsi le schème "changer le nombre de cubes verts" est-il précisé en "changer le nombre de cubes verts d'un seul cube" et le schème "changer la position relative des cubes" est-il précisé en "changer la position d'un seul cube vert d'une seule position". D'autres précisions sont possibles et peuvent engendrer une variété de structurations semblables. On s'aperçoit également qu'une structuration comme celle de la figure 2 implique des activités de classification (tours de même nombre de cubes verts) et de sériation des classes de même nombre de cubes verts et des éléments de ces classes. Dans la genèse d'un tel groupement par les enfants, il faudra donc s'attendre à des degrés différents d'élaboration caractérisés par l'absence ou la présence des divers aspects susmentionnés. Finalement, pour pouvoir engendrer systématiquement toutes les tours, la présence simultanée des deux schèmes est nécessaire dans des degrés suffisants de précision. Un seul schème ou des précisions inadéquates ne permettent que des structurations partielles auxquelles il faudra s'attendre dans l'élaboration de ces groupements par les enfants.

Les deux schèmes opératoires discutés précédemment ne sont pas les seules actions auxquelles il faudra s'attendre dans l'expérimentation de la situation, même si ces actions nous semblent être naturelles et impérieuses. Des expériences exploratrices avec des jeunes enfants ont révélé l'apparition de schèmes opératoires comme "interchanger vert et blanc", "inverser la tour" et la composition de ces deux schèmes. Nous avons représenté

Figure 2: groupement des tours à cinq étages et à deux couleurs (schèmes élémentaires: "changer le nombre de verts d'un seul vert" et "changer la position d'un seul cube vert d'une seule position")

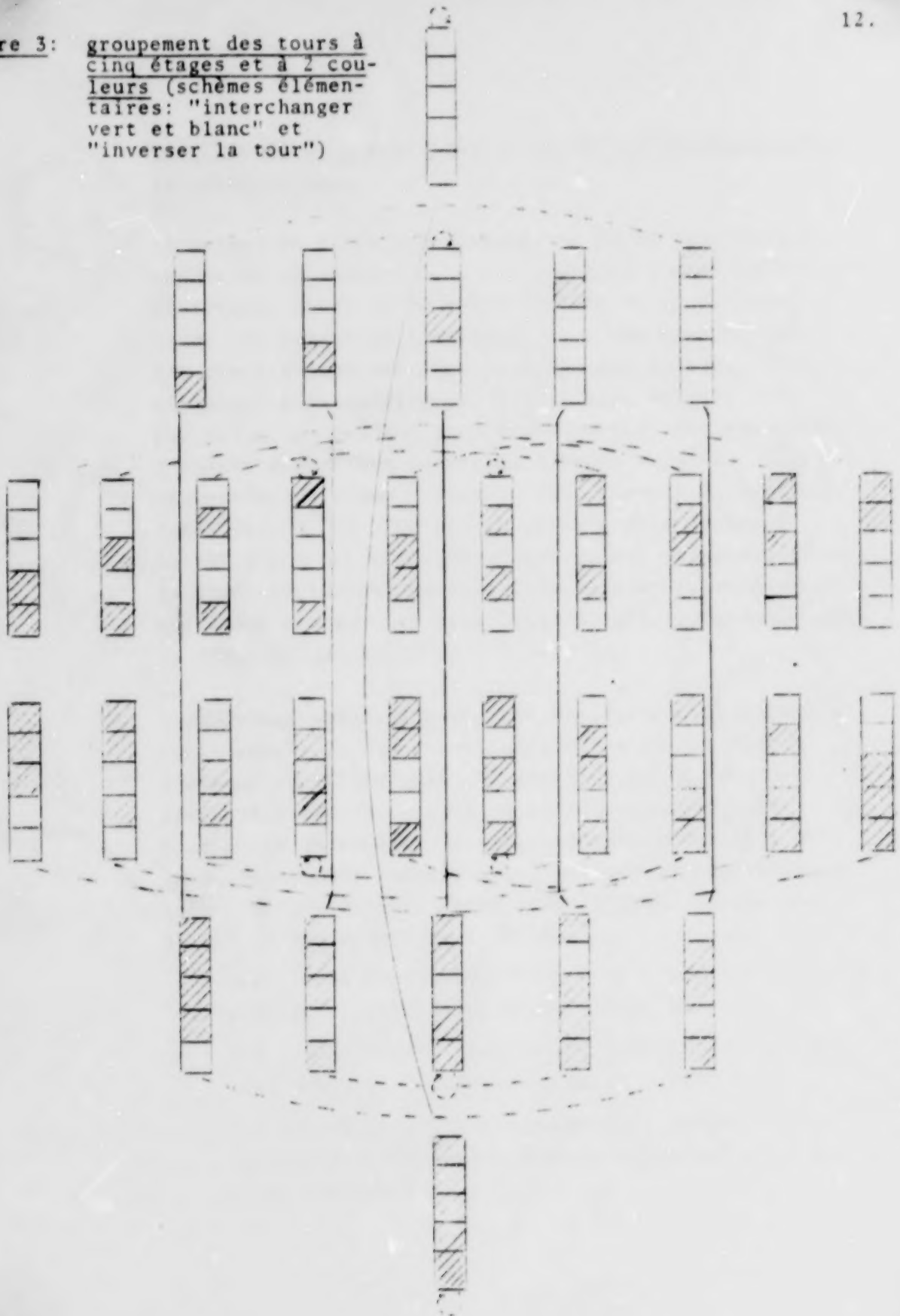


ces deux schèmes dans la figure 3. On y constate une certaine "symétrie" de l'ensemble de ces tours: cet ensemble est constitué de paires de tours "contraires", celles-ci étant l'image l'une de l'autre par l'interchangement des couleurs; l'inversion de la tour ne produit pas toujours une nouvelle et ainsi ressort la propriété de la symétrie de certaines tours. L'élaboration d'une telle structuration n'amène pas nécessairement à l'ensemble de toutes les tours mais elle engendre un partage en classes d'une, de deux ou de quatre tours selon l'application de l'un ou l'autre ou des deux schèmes. Néanmoins, l'application conséquente de l'un ou l'autre de ces schèmes constitue un groupement, possiblement partiel, c'est-à-dire dans lequel n'apparaîtront pas toutes les tours. Il constitue un exemple de groupement d'équivalence qui pourra se manifester, dans l'expérimentation, par l'association de tours en paires ou en classes variées.

Une résolution complète du problème de la situation ne sera possible que si le sujet parvient à élaborer un groupement d'ordre possiblement total de ces tours à cinq étages. Les deux derniers schèmes discutés ne seront pas utiles dans ce contexte. La superposition de schèmes semblables à ceux de la figure 2 y parviendra pourvu que ces schèmes puissent être précisés adéquatement. Le groupement de la construction des tours (figure 1) engendre une relation d'ordre total des tours à 5 étages analogue à l'ordre des 32 premiers nombres naturels représentés en base deux. Mais celle-ci n'est pas directement accessible par des opérations simples pouvant être effectuées immédiatement sur les tours à cinq étages.

L'expérimentation de la situation nécessite donc une attention particulière afin de déceler l'apparition de schèmes opératoires tels que discutés ci-haut tout en restant sensible aux actions inattendues ou imprévisibles.

Figure 3: groupement des tours à cinq étages et à 2 couleurs (schèmes élémentaires: "interchanger vert et blanc" et "inverser la tour")



3. Description de l'expérimentation et de l'enregistrement des observations

La situation a été expérimentée de façon individuelle auprès de 39 enfants de l'école primaire Jean XXIII à Sherbrooke entre le 16 novembre 1978 et le 12 janvier 1979. En raison de l'exploration d'une progression des réactions en fonction de l'âge des enfants, nous choisissions aléatoirement six ou sept enfants par degré. - Pendant l'expérimentation, on encourageait l'enfant à exprimer sa pensée à haute voix et cela, par des questions comme: "Peux-tu dire comment tu as trouvé cette tour"? ou "Qu'est-ce qui t'a fait penser à cette tour"? Ceci, toujours dans le but de reconnaître le plus précisément possible les actions (concrètes ou mentales) des enfants sans, pour autant, intervenir dans la démarche spontanée de l'individu.

L'expérimentatrice a noté, sur une fiche d'observation (voir annexe 1) les tours construites dans l'ordre d'exécution en indiquant la position de la tour dans l'espace prévu en dessous de son dessin. Si cette tour a été dédoublée, la position additionnelle a été indiquée au même endroit. Les actions ont été enregistrées par des flèches entre états (tours). Nous avons distingué trois sortes de flèches.

- une flèche pointillée (- - - - →) si l'expérimentatrice pensait y avoir reconnu une action précise;
- une flèche simple (——→) si l'enfant avait utilisé une action précise au moins trois fois;
- une flèche spéciale (—v→) si l'enfant avait verbalisé cette action (cette verbalisation a été notée également).

Au moment où l'enfant ne réussissait plus à construire de nouvelles tours, nous terminions l'expérience en lui demandant s'il pensait les avoir toutes construites. Nous consignions alors sa réponse et son raisonnement s'il y en avait lieu.

Ainsi espérions-nous pouvoir recueillir suffisamment d'informations pertinentes nous permettant de décrire, au moins fragmentairement, l'image mentale(et sa richesse relative)que s'est élaborée l'enfant à partir de la situation où il était placé.

4. Les observations et leurs traitements

a) Description d'un cas précis

Nous commençons la discussion des observations et de leurs traitements avec la description d'un cas précis. Pour faire cela, nous nous référons à la fiche d'observation de Lyne C. (9 ans et 7 mois) présentée en annexe 2.1. Si l'on y poursuit la construction des tours dans l'ordre, l'apparition de celles-ci nous semble d'abord aléatoire. Ce n'est que la quatrième tour qui aurait pu être construite à partir de la troisième au moyen du schème opératoire "interchanger vert et blanc" ce que nous avons symbolisé par α . La flèche a été tracée au pointillé parce que nous ne pouvions pas être certains que l'enfant eût reconnu clairement cette opération. Lors de la construction de la sixième tour, l'enfant nous expliquait l'avoir trouvée en tournant la cinquième tour. Nous avons indiqué ceci par une flèche spéciale (——v——▶) en y ajoutant la verbalisation et le symbole β que nous avons retenu pour ce schème opératoire. Nous n'avons pas pu à ce

moment trouver d'explication pour la construction de la septième tour. Cependant, l'enfant a clairement relié la huitième tour à la première puisqu'il expliquait en avoir construit le "contraire". Cette opération a été symbolisée par a ce qui a été alors indiqué en conséquence. Le couple suivant de tours semble également être relié par α, quoiqu'on ne puisse pas donner de raisons pour la construction de la neuvième tour. De façon analogue, les tours 11 et 12 ont été reliées explicitement par β (inverser la tour); on ne connaît, cependant, pas les raisons qui ont amené l'enfant à concevoir la 11ième tour. La construction des tours 13, 14, 15, 16 et 17 semble être aléatoire et Lyne ne pouvait pas nous dire comment elle les avait trouvées. Par la suite, l'enfant a conçu les tours 18, 19 et 20 en les reliant explicitement aux tours 7, 13 et 14 respectivement par α. Finalement, les tours 21 et 22 ont été reliées par β aux tours 17 et 11. - En tout, l'enfant avait, pendant 22 minutes, construit 22 tours, dont deux tours dédoublées. A la fin de l'expérience, Lyne n'était pas certaine d'avoir trouvé toutes les tours mais elle ne savait plus comment en construire d'autres. Cette expérience nous semble indiquer une conception rudimentaire des schèmes opératoires α (interchanger vert et blanc) et β (inverser la tour). Quoique ces schèmes aient été appliqués explicitement à maintes reprises, ils n'ont pas été utilisés systématiquement pour engendrer de nouvelles tours. La genèse de ces actions semble se faire simultanément avec une préférence tantôt pour l'une tantôt pour l'autre. Pour pouvoir mieux observer ce processus de genèse d'actions, nous avons transcrit la fiche d'observation sur une fiche d'analyse présentée en annexe 2.2. Cette fiche fait ressortir davantage l'apparition hésitante des schèmes α et β au cours de la construction

des tours. Le nombre de tours conçues à l'aide d'actions identifiables semble augmenter au fur et à mesure que la construction progresse. Ainsi nous semble-t-il pertinent d'identifier, à part le nombre total de tours construites, celui des tours dédoublées et celui des tours différentes construites, les résultats suivants:

- les tours (ou leur nombre) construites à l'aide de schèmes identifiables;
- les tours (ou leur nombre) construites aléatoirement (sans que l'on puisse attribuer la construction à une action précise);
- les tours (ou leur nombre) isolées (c'est-à-dire les tours qui ne sont reliées à aucune autre par une action identifiable);
- la fréquence F (nombre de fois) d'application d'opérations quelconques ou d'opérations précises.

Pour faciliter une interprétation de l'image mentale que s'est construite l'enfant, nous avons transcrit ses résultats sur une fiche de structuration dans le but de faire ressortir davantage la structure de sa construction. (Voir annexe 2.3). Dans cette présentation des résultats, nous reconnaissons plus facilement les liens que l'enfant a pu établir entre les états différents dans la totalité des états, et ceci par des opérations quelconques ou par des opérations précises. Ici, il nous semble pertinent d'identifier le nombre de paires d'états reliés par une opération donnée en comparaison avec le nombre de paires d'états reliables par cette opération pour avoir une mesure de la complétude de l'établissement de relations entre les états du groupement. Une telle mesure visera à résumer convenablement les informations essentielles

de la fiche de structuration. Nous discutons l'élaboration de telles mesures en annexe 3.

b) Les résultats retenus dans chacune des expériences

A partir de la fiche d'observation, nous avons élaboré pour chacun des cas précis, une fiche d'analyse et une fiche de structuration de la manière décrite précédemment. Pour des fins de comparaison, nous avons retenu, sur une fiche de résultats présentée à l'annexe 2.4, les données suivantes:

Concernant les tours construites et leurs caractéristiques, nous déterminons:

- les nombres de tours construites, dédoublées et différentes;
- les tours (et leur nombre) construites aléatoirement ou à l'aide des schèmes α, β, γ, δ ou ε[1];
- les tours (et leur nombre) que l'enfant n'a reliées à aucune autre tour (tours isolées).

Concernant les schèmes opératoires, nous y identifions:

- la fréquence absolue F d'application de schèmes opératoires précis (α, β, γ, δ ou ε) et de schèmes opératoires quelconques (χ);

---

1. Nous identifions les schèmes opératoires observés par des lettres grecques: α: interchanger vert et blanc; β: inverser la tour; $\gamma = \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ δ: changer le nombre de cubes verts; ε: changer la position relative des cubes (sans changer le nombre de cubes verts ou blancs).

- le degré de connexion des états par des schèmes opératoires précis et quelconques, et cela, par rapport au nombre maximal de tours différentes possibles (D) ou par rapport au nombre de tours différentes construites par l'enfant (D')[1];
- la fréquence relative (FR) d'application de schèmes opératoires précis et en général[1].

Nous avons retenu ces diverses mesures dans le but d'explorer leur efficacité en tant que moyen de description des états de formation de groupement dans le cadre de la présente recherche.

---

1. Au sujet de la description de ces mesures, voir l'annexe 3.

5. Résultats d'expérimentation

a) Observations générales

En général, la problématique de la situation est bien accessible aux enfants du primaire. Ce n'est qu'auprès de quelques enfants du groupe de 6 ans qu'il a fallu intervenir pour leur signifier que les tours pouvaient être bicolores (dans le cas où l'enfant ne construisait que les tours toute blanche ou toute verte) ou que des cubes de même couleur pouvaient être accolés (dans le cas où l'enfant ne construisait que les tours où les couleurs des cubes alternent régulièrement).

On observe ensuite des enfants qui construisent les tours avec hésitation, d'autres avec beaucoup d'assurance. D'habitude, cette assurance diminue au fur et à mesure que le nombre de tours construites augmente: les enfants sont alors de plus en plus portés à construire de nouvelles tours à partir de tours déjà construites et à verbaliser ou à exprimer par geste des schèmes opératoires conçus. Dans le cas des enfants qui procèdent avec beaucoup d'assurance, il est gênant d'interrompre leurs activités pour leur demander de quelle manière les tours ont été construites. C'est ainsi que nous n'avons pas recueilli beaucoup de schèmes opératoires verbalisés dans une telle phase de la construction des tours. Par contre, une telle phase se prête davantage à l'observation de régularités ou de la persistance de l'application de schèmes opératoires.

En ce qui concerne l'application de schèmes opératoires, il est frappant de constater que le schème α (interchanger vert et blanc) apparaît le plus fréquemment et ceci, de manière persistante, pour tous les groupes d'âge. Les schèmes β et γ (inverser la tour et $\gamma = \alpha \circ \beta$) apparaissent beaucoup moins souvent et parfois de façon qui fait

présumer une certaine confusion avec α (l'enfant croit interchanger vert et blanc mais il fait effectivement γ ou β). L'application des schèmes δ et ε n'a été observée que dans relativement peu de cas et ceci seulement conjointement avec α et dans le cas d'enfants plus âgés.

L'observation de l'application de schèmes opératoires est encore ouverte à l'interprétation. D'abord, la non-observation ne veut pas dire l'absence de schèmes. Souvent, l'activité intense de l'enfant nous convainc de la présence de schèmes qui, malheureusement, ne sont pas identifiables ni par l'enfant, ni par l'observateur. Par souci d'objectivité, nous avons dû négliger ces cas dans l'enregistrement des schèmes identifiables et, généralement, nous présumons d'une fréquence plus élevée d'application de schèmes que nous n'avons pu noter dans les fiches d'observation. Dans le cas des schèmes observés sans verbalisation ou identification par l'enfant, il existe évidemment des cas limites où une faible persistance d'application (3 ou 4 fois) n'est pas très convaincante pour l'affirmation de l'existence d'un schème donné. Finalement, les verbalisations ou les identifications des enfants peuvent être plus ou moins précises. Ainsi les enfants identifient-ils, par exemple, par "faire le contraire" le schème α aussi bien que le schème β. Au lieu d'indiquer verbalement un schème précis, l'enfant nous indique souvent la tour à partir de laquelle il a construit une nouvelle tour; ce qui nous oblige, dans certains cas, à décider du schème le plus probablement appliqué. Malgré ces facteurs d'incertitude ou d'interprétation qui pourraient être diminués dans de futures expériences par des observations plus fines, il n'en reste pas moins que les grandes tendances du développement de structurations nous semblent être valables et dignes d'approfondissement ultérieur.

b) Les résultats mesurés et leurs comparaisons

Les observations qui suivent sont basées sur les données du tableau synthèse présenté en annexe 4. Ce tableau contient les principales informations retenues dans chacune des expériences individuelles:

(i) les informations concernant l'individu: nom, âge, classe et durée de l'expérience;

(ii) les résultats concernant la construction des tours: nombre de tours construites, nombre de tours différentes construites, nombre de tours construites aléatoirement, nombre de tours construites par α, β, γ, δ ou ε et le nombre de tours isolées;

(iii) les résultats concernant l'application de schèmes opératoires: fréquences relatives d'application de schèmes quelconques, de α, β, γ, δ ou ε et les degrés de connexion $D(\chi)$ et $D'(\chi)$.

Puisque la fréquence relative d'application de schèmes opératoires en général ($FR(\chi)$) est la mesure la plus propre à indiquer globalement la richesse de structuration de la situation par l'enfant, nous avons ordonné le tableau synthèse selon les valeurs de cette mesure. Dans les cas où aucun schème opératoire n'a pu être identifié, nous avons ordonné selon le nombre de tours différentes construites.

Le tableau laisse entrevoir une augmentation d'application de schèmes opératoires en corrélation avec l'âge des enfants. Les facteurs de corrélation entre l'âge des enfants et les différentes mesures de la complétude d'application

de schèmes sont donnés dans le tableau suivant:

Facteurs de corrélation entre l'âge des enfants et les diverses mesures de complétude d'application de schèmes opératoires

	FR(χ)	FR(α)	D(χ)	D'(χ)
Facteur de corrélation	0.616[1]	0.672[1]	0.686[1]	0.556[1]

Tableau 1

Ces données semblent indiquer une progression de la capacité de l'enfant de structurer la situation en fonction de son âge. Cette progression est caractérisée par une application de plus en plus fréquente de schèmes opératoires (surtout α), par une augmentation de tours différentes construites et par une augmentation du degré de connexion. Globalement, trois phases de progression peuvent être identifiées.

Phase 1: Exploration sans identification de schèmes précis

Cette phase est caractérisée par l'impossibilité d'identification de schèmes précis (FR(χ) = 0), par beaucoup de tâtonnements dans la construction des tours, par la construction d'un nombre relativement faible de tours ou par la construction de plusieurs tours dédoublées et cela pendant une durée relativement longue de travail.

1. Tous ces facteurs sont significatifs au seuil de 5%.

Phase 2: Emergence du schème opératoire α

Formellement nous avons identifié cette phase par $0 < FR(\chi) < 0.75$. Elle est de plus caractérisée par une assurance marquée dans la construction des tours, par l'absence presque totale de tours dédoublées, par un degré très haut de connexion $D'(\chi)$ des tours construites ou par la construction d'un assez grand nombre de tours.

Phase 3: Etablissement du schème α et émergence des schèmes ε et δ

Identifiée par $FR(\chi) \geq 0.75$, cette phase est de plus caractérisée par l'apparition plus fréquente des schèmes ε et de δ. Le nombre de tours différentes construites se rapproche du nombre maximal ou le nombre de tours dédoublées est 0. Les tours différentes construites par l'enfant sont toutes connectées entre elles, $D'(\chi) = 1$.

Le tableau ci-après montre les moyennes des diverses mesures d'application de schèmes et les moyennes d'âge des sujets pour les trois phases décrites.

Moyennes caractérisant les phases de structuration

	Age	FR(χ)	FR(α)	D(χ)	D'(χ)
Phase 1	7;8	0	0	0	0
Phase 2	9;1	0.45	0.35	0.41	0.9
Phase 3	11;1	1.06	0.74	0.78	1

Tableau 2

Les frontières entre ces trois phases sont évidemment assez perméables. Si les phases elles-mêmes servent alors principalement comme indication d'une progression, elles ne peuvent pas être considérées comme des étapes du développement de l'enfant.

IV. Conclusion et prospectives

L'apparition progressive de schèmes opératoires relevés dans cette situation expérimentale, soit par la cohérence de construction de tours, soit par des gestes appropriés ou soit par des verbalisations des enfants, peut être considérée comme principal indice de la formation de groupements. L'identification de ces schèmes et la détermination de leur fréquence est le plus grand problème dans ce type d'expérience. Même si les méthodes d'observation peuvent être raffinées, il semble être impossible d'exclure toute subjectivité dans l'interprétation des actions des enfants.

La structuration de la situation expérimentée se fait, au niveau primaire, principalement à partir de schèmes opératoires involutifs: α surtout, ensuite β ou γ. Ceci signifie que ces enfants pensent avant tout dans le cadre d'un groupement comme celui de la figure 3 qui regroupe les états en paires de tours contraires. Les schèmes opératoires δ et ε n'apparaissent que plus tard et avec une fréquence moindre que pour le cas des schèmes involutifs. Ainsi ne peut-on pas dire qu'un groupement comme celui de la figure 2 constitue spontanément le cadre de pensée des enfants du primaire. Dans l'expérience décrite, nous n'avons pas pu observer des schèmes opératoires indiquant une certaine conception du groupement de construction de tours (figure 1).

Pour indiquer une tendance de progression, nous pouvons postuler trois phases caractérisées surtout par la fréquence relative d'application de schèmes opératoires (FR(χ)) qui nous apparaît comme la mesure la plus apte à décrire, globalement, la richesse de structuration de la situation.
($FR(\chi) = 0$, $0 < FR(\chi) < 0.75$, $0.75 \leq FR(\chi)$).

Dans des expériences ultérieures, nous nous proposons de raffiner les méthodes d'observation à l'aide de documents audio-visuels et de leur analyse afin de pouvoir augmenter l'objectivité dans la détermination des schèmes opératoires. Il sera également souhaitable de prolonger l'expérience aux groupes d'âges plus avancés afin de pouvoir préciser la progression possible de δ et ε.

Durant l'expérimentation, nous avons observé des enfants qui, après analyse des tours déjà construites, concevaient d'autres schèmes opératoires qui leur permettaient de progresser davantage.

La stimulation de telles analyses pourra constituer une intervention didactique dont l'effet pourrait être indiqué par la progression supplémentaire. Ainsi, nous proposons-nous d'expérimenter diverses interventions didactiques dans le cadre de cette situation afin de déterminer leurs effets en tant que différence de progression.

L'élaboration de situations semblables dans des contextes plus proches de l'enseignement de la mathématique au primaire (surtout en arithmétique et en géométrie) pourrait tirer avantage des résultats de cette expérience exploratoire.

Annexe 1

Fiche d'observation: Expérience des tours

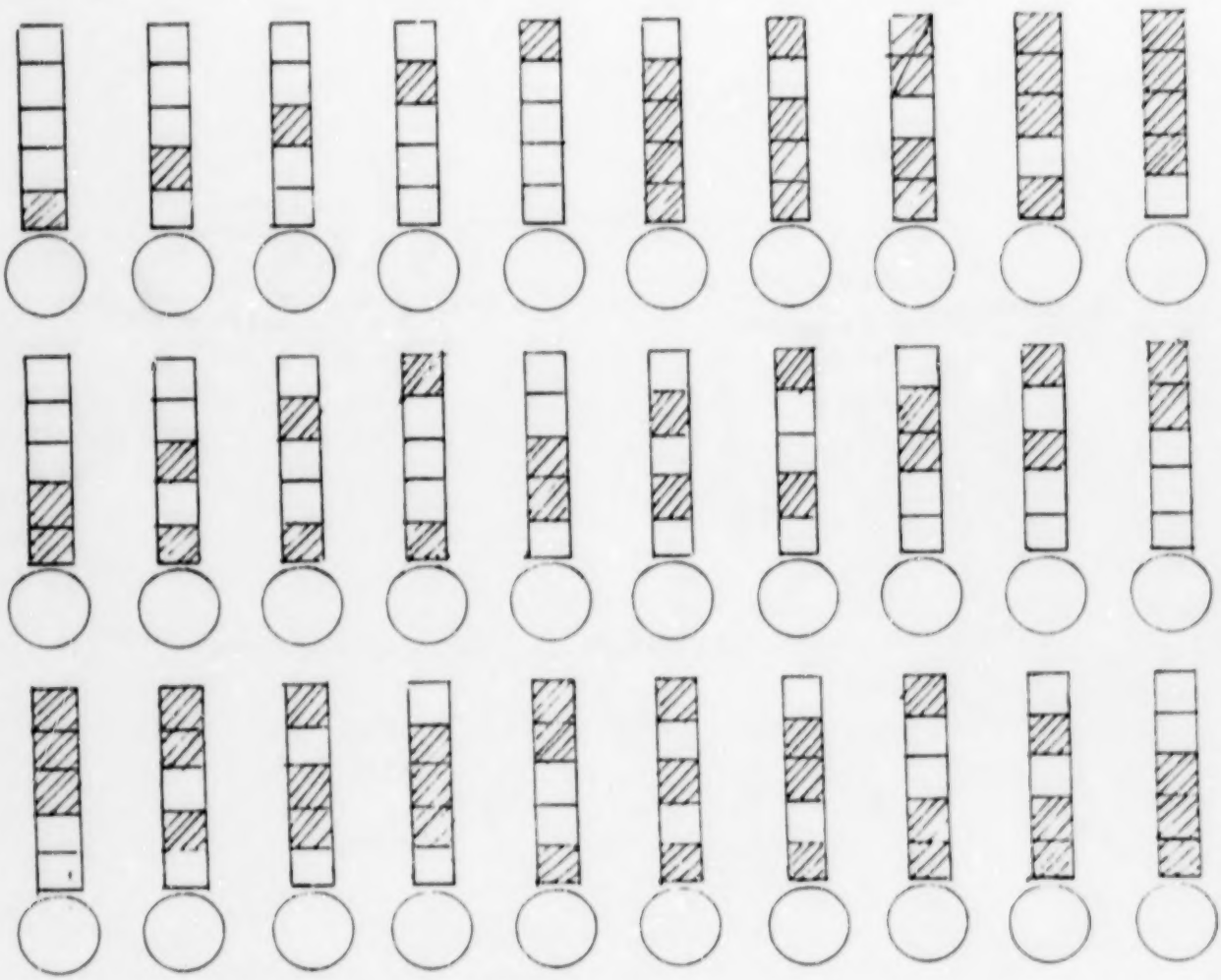
L'apprenant: Nom: Sexe: Ecole:
Classe:

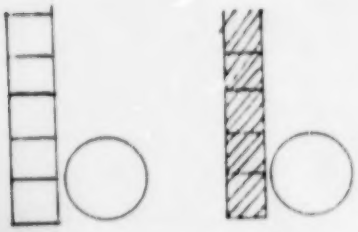
	Année	mois	jour
Date:			
Date de naissance:			
Age:			

Classification:

Durée:

L'expérience:





Remarques:

Annexe 2.1

Fiche d'observation: Expérience des tours

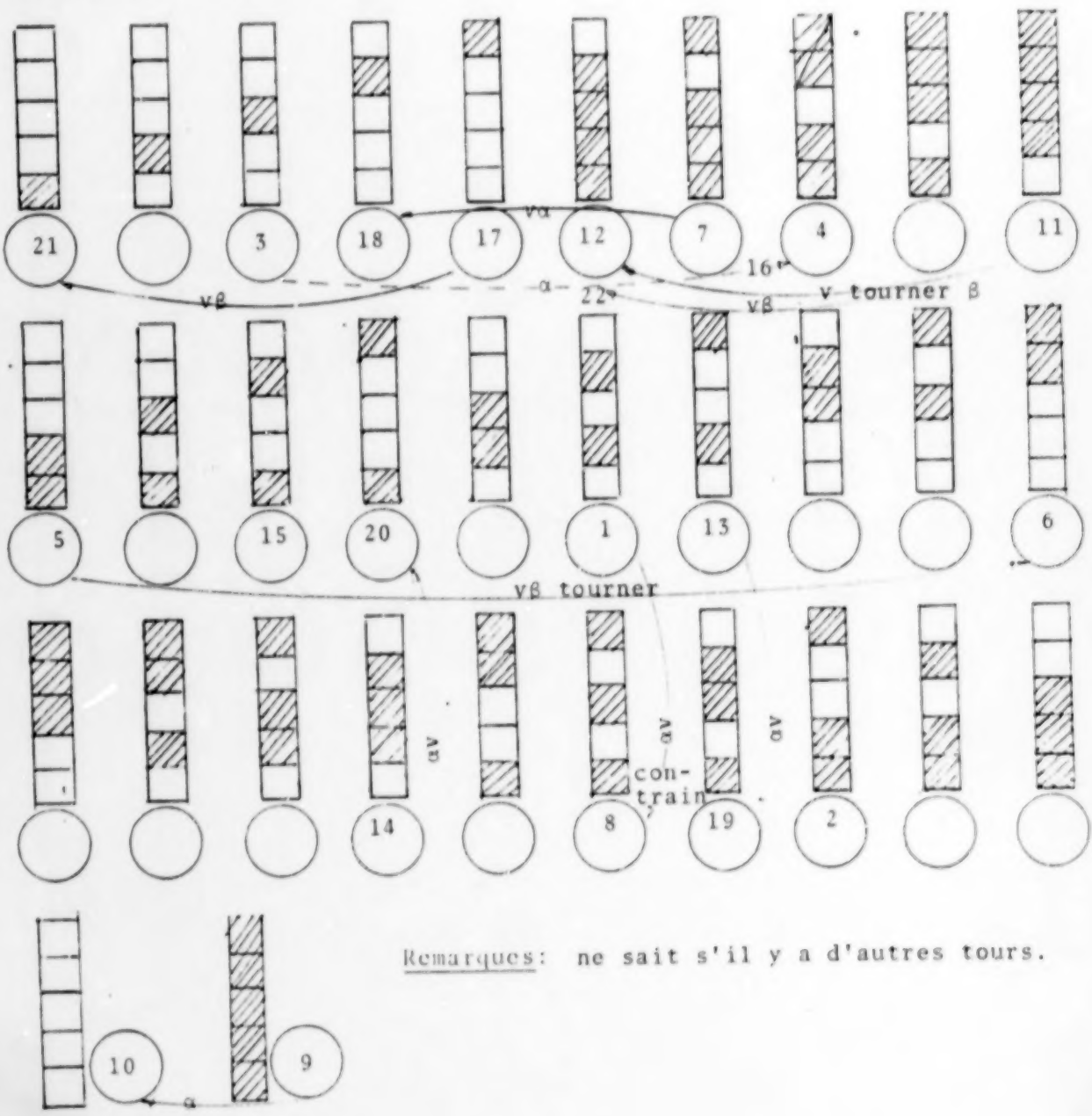
L'apprenant: Nom: Lyne C. Sexe: f Ecole: Jean XXIII
Classe: 4e

	Année	mois	jour
Date:	79	01	12
Date de naissance:	69	06	7
Age:	9	7	5

Classification: fort (F)

Durée: 22'

L'expérience:

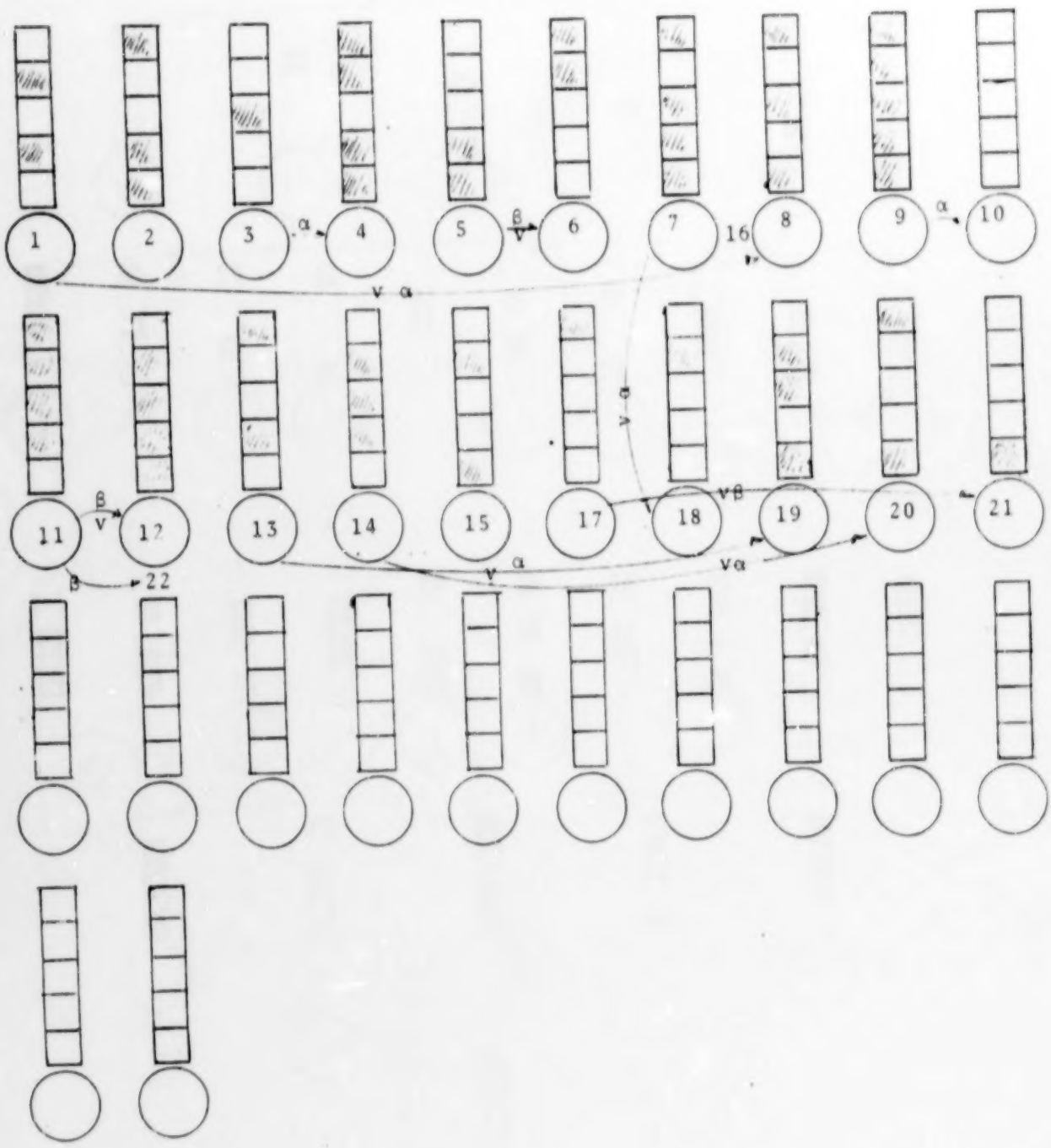


Remarques: ne sait s'il y a d'autres tours.

Fiche d'analyse: Expérience des tours Annexe 2.2

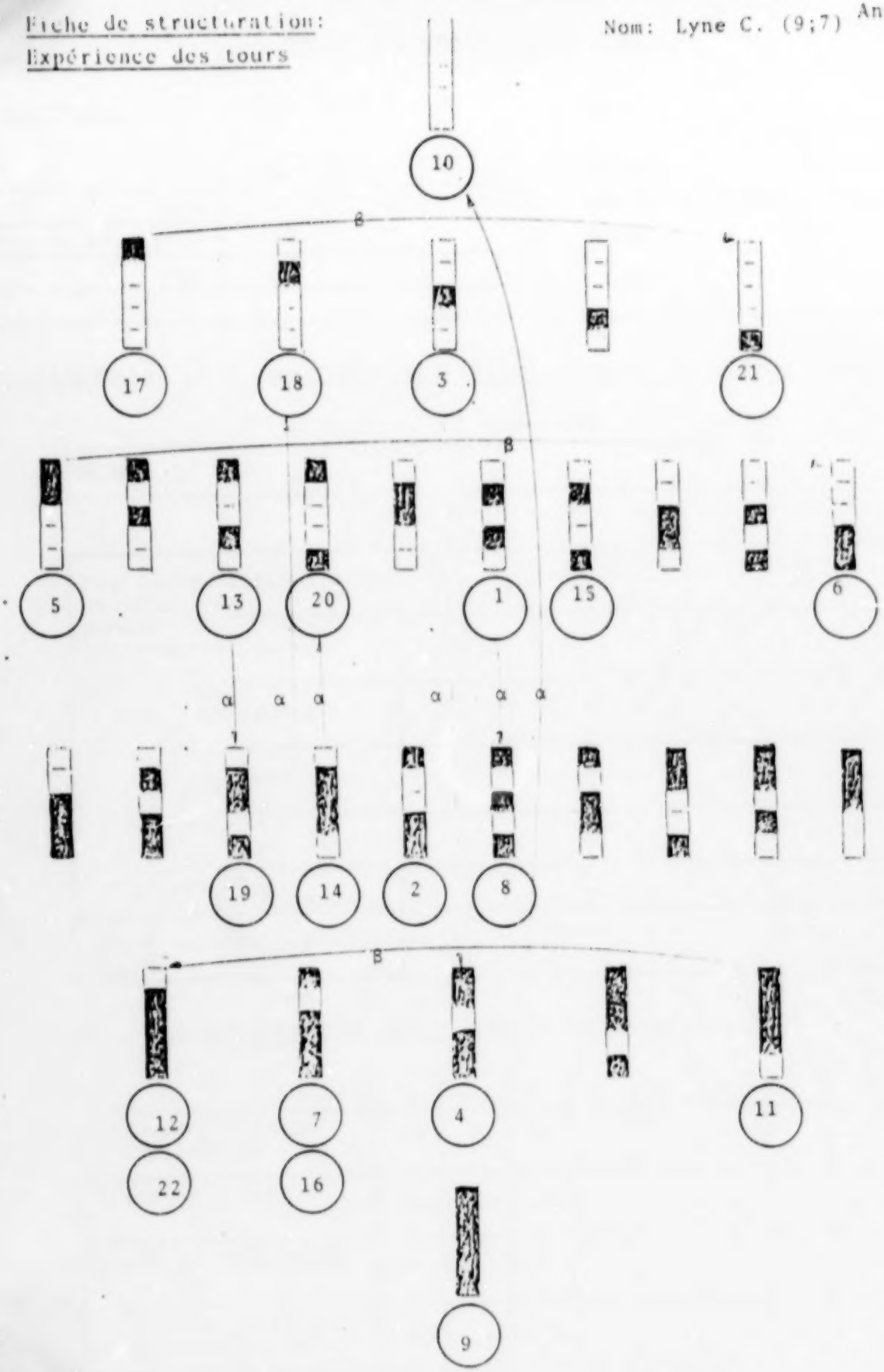
Nom: Lyne C. (9;7)

Tours construites dans l'ordre:



Fiche de structuration:
Expérience des tours

Nom: Lyne C. (9;7) Annexe 2.3



Annexe 2.4

Fiche de résultats: Expérience des tours

L'apprenant: Nom: Lyne C. Sexe: f Ecole: Jean XXIII

	Année	mois	jour
Date:	79	01	12
Date de naissance:	69	06	7
Age:	9	7	5

Classe : 4e
Classification: F(fort)
Durée : 22'

Les résultats: a.- Les tours construites et leurs caractéristiques

	construites	dédoublées	différentes
Nombre de tours	22	2	20

Les tours et leur nombre construites	aléatoirement	12	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17
	par α	6	4, 8, 10, 18, 19, 20
	par β	4	6, 12, 21, 22
	par γ		
	par δ		
	par ϵ		
Tours construites isolées		3	2, 15, 16

b.- Les opérations et leurs fréquences d'application

	α	α	β	γ	δ	ϵ				
Fréquence absolue d'application F	10	6	3							
Degré de connection D	0.563	0.375	0.188							
Degré de connection D'	0.9	0.6	0.3							
Fréquence relative d'application FR	0.625	0.375	0.25							

Annexe 3

Mesures de la complétude d'application de schèmes opératoires

L'information principale transmise par la fiche de structuration est un degré de structuration auquel est arrivé l'enfant au cours du processus de construction des tours. Pour des fins de comparaison, il sera utile de caractériser ce degré de structuration par une mesure qui mettra en relation l'acquis (observable), concernant les schèmes opératoires avec une référence objective d'une acquisition suffisante ou optimale. Les deux stratégies décrites ci-après nous semblent être acceptables dans ce contexte.

a) Le degré de connexion des états par un schème

La fiche d'analyse présente un certain nombre d'états reliés par des schèmes opératoires dans un ensemble de tours différentes construites par l'enfant ou dans un ensemble de tours différentes possibles, lesquelles pourront, optimalement, toutes être reliées par ces schèmes. Une telle optique nous amènera à concevoir une mesure qui indiquera un degré de connexion des états ou bien par des schèmes en général ou bien par des schèmes particuliers. Ainsi obtiendrons-nous

$$D(\alpha) = \frac{\text{nombre d'états reliés par } \alpha}{\text{nombre d'états possibles reliables par } \alpha}$$

Pour une telle mesure, nous mettons donc le nombre de tours où part ou arrive au moins une flèche α en relation avec le nombre maximal de tours différentes où peut partir ou arriver une flèche α. Pour α, ce nombre sera donc 32. Nous pouvons également mettre le nombre de tours où part ou arrive une flèche α en relation avec

le nombre maximal de tours différentes construites par l'enfant où peut partir ou arriver une flèche α. Ceci nous donnera:

$$D'(\alpha) = \frac{\text{nombre d'états reliés par } \alpha}{\text{nombre d'états (construits par l'enfant) reliables par } \alpha}$$

Pour le cas discuté dans ce rapport, cette mesure est alors

$$D(\alpha) = \frac{12}{32} = 0.375 \quad \text{ou} \quad D'(\alpha) = \frac{12}{20} = 0.6$$

Ainsi la mesure D(α) fournit-elle une sorte de complétude de connexions par α, tandis que D'(α) donne une mesure de la complétude des connexions par α mais restreintes à l'ensemble des tours que l'enfant a effectivement construites.

Les mesures D et D' s'appliquent, de façon analogue, aux schèmes opératoires β, γ, δ, ε. Elles s'appliquent également et de la même façon aux schèmes opératoires χ en général en identifiant et comptant les tours où il part où arrive au moins une flèche quelconque. La valeur maximale de ces mesures est 1 pour tous les schèmes. L'avantage de ces mesures est la détermination facile et unique (pour tous les schèmes) du référentiel des tours possibles ou des tours différentes construites par l'enfant. L'inconvénient de ces mesures est qu'elles ne discriminent que s'il y existe des états non reliés par l'un ou l'autre des schèmes opératoires et qu'elles identifient tous les cas caractérisés par de multiples connexions.

Il sera donc opportun d'envisager d'autres mesures qui pallieront à cette inconvenance.

b) La fréquence relative d'application d'un schème opératoire

L'idée fondamentale pour cette mesure est de comparer le nombre de paires d'états connectés par un schème avec un nombre optimal de paires d'états connectables par ce schème. Le problème principal d'une telle mesure est la détermination de ce nombre optimal de paires d'états connectables par un schème donné. Tout d'abord, ce nombre varie d'un schème à l'autre. Ensuite, ce nombre est, pour les schèmes δ et ε, passablement élevé de sorte que les valeurs de mesure seront très petites et qu'il sera irréaliste de penser pouvoir en observer un nombre raisonnable. Nous discuterons cette mesure ci-après pour chacun des schèmes opératoires.

Dans le cas du schème opératoire α, le nombre de paires de tours reliables par α se détermine facilement à 16, car les 32 tours sont partitionnées en 16 classes de 2 tours chacune par le schème opératoire. Pour une mesure de la fréquence relative de l'application de α par rapport à l'ensemble de toutes les tours possibles, il n'y a alors pas de problème. Cependant, si l'on veut mesurer cette fréquence par rapport à l'ensemble des tours construites par l'enfant, le nombre de paires reliables par α ne dépend plus simplement du nombre des tours construites mais essentiellement de la nature des tours construites. Il nous semble alors illusoire et inopportun de vouloir élaborer, pour chaque expérience, ce nombre très variable de référence. Il faudra donc, pour la mesure d'une telle fréquence relative, se restreindre à la mesure par rapport à l'ensemble de toutes les tours possibles. - Pour le cas précis discuté dans ce rapport, la fréquence relative d'application de α

est donc:

$$FR(\alpha) = \frac{6}{16} = 0.375$$

ce qui coïncide avec la mesure D, ce qui sera d'ailleurs toujours vrai pour α (à cause de son caractère involutif et du fait qu'aucune tour ne soit transformée en elle-même par α).

Dans le cas de β, le nombre de paires de tours différentes reliables par ce schème est 12; il y a 8 tours qui sont transformées en elles-mêmes (tours symétriques). Conformément au fait que l'on compte ces tours comme paires reliables ou non, il y a donc 20 ou 12 de ces paires. Mais puisque la situation a été ainsi présentée que l'enfant n'indiquera pas les schèmes qui n'engendrent pas de nouvelles tours, il sera plus raisonnable de ne compter que 12 paires. Ainsi, la fréquence relative de l'application de β s'établira-t-elle à 12 cas possibles, ce qui donne dans le cas précis de ce rapport la valeur suivante:

$$FR(\beta) = \frac{3}{12} = 0.25$$

Le cas de γ est analogue à celui de α, car l'ensemble des 32 tours est partitionné, par γ, en 16 classes de 2 tours chacune. Dans ce cas, les mesures FR et D coïncident également.

Dans le cas de δ, le nombre de paires de tours reliables par ce schème s'établit à 386. Il est donc tellement élevé que la plupart des manifestations ne pourront jamais être observées. Dans la présente expérience, un schème opératoire précis n'est observable que dans le cas où une nouvelle tour est construite à l'aide de

ce schème. Si l'on tient compte de cette restriction, alors le nombre de paires observables de tours reliées par δ se réduit à 31. Il faudra donc calculer la fréquence relative d'application de δ par rapport à un nombre optimal de 31 paires observables de tours reliées par δ.

Dans le cas de ε, finalement, le nombre de paires de tours différentes reliables par ce schème s'établit à 110, un nombre qui est également trop élevé pour être possiblement observé dans une expérience concrète. Nous le réduisons considérablement en tenant compte que les schèmes ne sont observables que si une nouvelle tour est construite. Sous cet aspect, le nombre optimal de paires observables de tours reliables par ε s'établit à 26 (4 parmi les tours à 1 cube vert; 9 parmi les tours à 2 cubes verts; 9 parmi les tours à 3 cubes verts et 4 parmi les tours à 4 cubes verts). La fréquence relative d'application de ε devrait donc être calculée par rapport au nombre optimal 26 de paires observables de tours reliables par ε.

La somme des fréquences relatives d'application des divers schèmes, FR(χ), fournira finalement une mesure convenable de la richesse de structuration de la situation par l'enfant.

Annexe 4: Tableau synthèse des résultats

NOM	Age	Classe	Durée	Construites	Différentes	Aléatoirement	Tours α	β	γ	δ	ε	Isolées	Schèmes opératoires FR(x)	FR (α)	FR (β)	FR (γ)	FR (δ)	FR (ε)	D(x)	D'(x)
Marie-Josée St.-H.	7;4	2	8	7	7	7						7								
Denis L.	6;10	1	10	9	9	9						9								
Pascal F.	7;3	2	10	10	10	10						10								
Stéphane N.	9;2	4	19	15	14	15						15								
Marie-France A.	6;10	1	30	17	14	17						17								
Johanne J.	9;4	4	10	16	16	16						16								
Steve J.	6;6	1	17	24	16	24						24								
Daniel L.	6;7	1	30	36	19	36						36								
Nancy G.	10;11	4	27	36	23	36						36								
Clément M	7;8	2	35	33	25	33						33								
Steve N.	6;4	1	35	36	26	26						36								
Eric L.	6;11	1	7	8	8	4	4					0	0.25	0.25					0.25	1.0
Hélène D.	10;9	5	9	8	8	4	4					0	0.25	0.25					0.25	1.0
Fanny T.	6;8	1	9	8	8	4	4					0	0.25	0.25					0.25	1.0
Stéphane C.	8;7	3	6	9	9	5	4					1	0.25	0.25					0.25	0.89
Chantale C.	7;3	2	8	10	10	5	5					0	0.31	0.31					0.31	1.0
Nancy P.	9;0	3	12	10	10	5	5					0	0.31	0.31					0.31	1.0
Daniel A.	8;5	3	13	15	15	11		4				7	0.33		0.33				0.25	0.55
Martine T.	9;9	4	8	10	16	9	7					2	0.44	0.44					0.44	0.88
Nathalie C.	8;5	2	31	22	19	14	8					5	0.5	0.5					0.5	0.84
Alain M.	9;5	5	17	14	13	5	5	2			4	0	0.51	0.19	0.17			0.15	0.41	1.0
Karyne R.	8;8	3	25	18	18	10	5	5				2	0.56	0.31	0.25				0.5	0.88
Alain B.	11;10	6	20	19	18	10	9					1	0.56	0.56					0.56	1.0
Lyne C.	9;7	4	18	22	20	12	6	4				3	0.63	0.38	0.25				0.56	0.9
Guylaine N.	11;2	5	21	30	24	18	12					5	0.63	0.63					0.63	0.83
Carole G.	11;6	6	32	25	25	12	4	5		4		4	0.66	0.25	0.25		0.16		0.59	0.83
Ghislain T.	7;10	2	42	26	25	14	6	2			4	5	0.7	0.38	0.17			0.15	0.56	0.78
Anne B.	11;2	5	30	55	24	19	15					5	0.75	0.75					0.75	1.0
Donald L.	13;3	6	15	22	18	5	11			5		0	0.75	0.56			0.19		0.56	1.0
Alain L.	11;4	6	25	25	22	11	7	2		2	5	1	0.78	0.44	0.17		0.06	0.11	0.69	1.0
Nathalie J.G.	12;1	6	8	18	16	5	9				6	0	0.79	0.56				0.23	0.56	1.0
Martine C.	10;7	5	21	25	22	6	11				4	1	0.84	0.69				0.15	0.69	1.0
Eric B	8;5	3	22	20	20	5	10				7	0	0.89	0.62				0.27	0.62	1.0
Stéphane G.	11;1	5	48	32	32	16	16					0	1.0	1.0					1.0	1.0
Claude B.	12;0	6	40	35	32	17	16					3	1.0	1.0					1.0	1.0
Alain C.	10;8	5	25	24	24	5	10	2		2	5	0	1.06	0.63	0.17		0.07	0.19	0.75	1.0
Stéphane P.	10;6	5	24	22	22	6	11	6		2		0	1.26	0.69	0.5		0.07		0.69	1.0
Alain D.	12;2	6	14	32	32	4	16				12	0	1.62	1.0				0.62	1.0	1.0
Sonia J.G.	9;9	4	54	37	32	12	16	10				0	1.96	0.94	0.83	0.19			1.0	1.0

Bibliographie

a) H. Allard, P. Allard, C. Goupille, D. Lunkenbein, Polyèdres - Unité d'enseignement en 5 leçons, Dépt. de mathématiques, Université de Sherbrooke, février 1979.

b) L. Aubin, J. Jutras, Elaboration de groupements logiques d'inclusion et de groupements logiques des classes d'une partition dans un ensemble d'hexagones, Mémoire de maîtrise, D.G.F.M., Université de Sherbrooke, septembre 1979.

c) R, Bibeau, Essai de rationalisation d'une séquence de situations d'apprentissage: la classification de quadrilatères, Mémoire de maîtrise, D.G.F.M., Université de Sherbrooke, juin 1977.

d) M. Hamel, Schématisation de groupements logiques d'inclusion dans l'étude de quadrilatères, Mémoire de maîtrise, D.G.F.M., Université de Sherbrooke, juin 1979.

e) D. Lunkenbein, Rationalising Teaching Interventions - A Working Model of a Process of Research in Mathematics Teaching, Ed. Studies in Mathematics 8 (1977) 271-293.

f) D. Lunkenbein, H. Allard, C. Goupille, Rationalisation d'interventions didactiques - Recherches didactiques pour une mathématique à la portée de tous et adaptée à chacun, Conférence à la rencontre annuelle de la CIEAEM, Veszprém (Hongrie), août 1979.

g) E. Wittmann, The concept of grouping in J. Piaget's psychology - Formalization and applications, Ed. Stud. in Math. 5 (1973) 125-146.

h) E. Wittmann, Natural numbers and groupings, Ed. Stud. in Math. 6 (1975) 53-75.